PROBABILITY
AND
MATHEMATICAL STATISTICS

Vol. 8 (1987), p. 117–132

PRINCIPE D'INVARIANCE FAIBLE POUR LA FONCTION DE REPARTITION EMPIRIQUE DANS UN CADRE MULTIDIMENSIONNEL ET MELANGEANT

PAR

PAUL DOUKHAN (PARIS) ET FREDERIC PORTAL (PARIS)

Abstract. A strictly stationary and strongly or uniformly mixing sequence of random variables (ξ_n), $n \geqslant 0$, is considered. There are given estimates of even moments for partial sums of Marcinkiewicz-Zygmund type and an exponential inequality for the case of a geometrically uniformly mixing random sequence.

Let F_n be the empirical repartition function of the sequence (ξ_n) and F its repartition function. There is, moreover, given, for the multidimensional case, a weak invariance principle. A stationary sequence Y_n of Gaussian processes such that

$$P\big(\sup_{R^d} |\sqrt{n}(F_n - F) - Y_n| \geqslant bn^{-a}\big) \leqslant bn^{-a} \quad \text{with } a \approx \frac{1}{3(5d+4)}$$

is constructed.

For the estimate of the Prohorov distance a calculus of oscillations and a multidimensional central limit theorem were applied.

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude de variables aléatoires formant une suite strictement stationnaire et fortement mélangeante (resp. φ-mélangeante).

Nos motivations sont d'ordre statistique car d'importants modéles de processus mélangeants y sont utilisé; par exemple un processus A. R. M. A. est fortement mélangeant de même qu'un processus markovien Doeblin récurrent est φ-mélangeant, des exemples de tels modèles sont des suites m-dépendantes ou des processus autorégressifs dont la fonction de régression est bornée et le bruit blanc domine la mesure de Lebesgue. L'objet de ce travail est de faire des statistiques non paramétriques sur de tels modèles; nous commençons par utiliser l'approche de Bickel et Rosenblatt [1], c'est pourquoi le résultat essentiel de cet article est un principe d'invariance faible portant sur la fonction de répartition empirique. Pour aboutir à un tel résultat nous montrons d'abord, pour nous forger des outils, des inégalités de Marcinkiewicz-Zygmund, nous tirons dans un cas particulier une inégalité exponentielle de ces inégalités qui permettent d'évaluer les moments de sommes de variables aléatoires mélangeantes; nous donnons d'autres applications de ces inégalités dans [8].

Revenons à présent à l'objet central de cette étude. Soit $(\xi_k)_{k\geq 0}$ une suite de variables aléatoires strictement stationnaire à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ dont la fonction de répartition F est continue sur $\mathbf{R}^d$; nous posons

$$g_t(\xi_k) = I_{\{\xi_k < t\}} - F(t) \quad \text{et} \quad X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} g_t(\xi_k), \quad t \in \mathbf{R}^d,$$

où $\leqslant$ désigne l'ordre léxicographique sur $\mathbf{R}^d$.

Nous supposerons aussi des conditions réalisées pour que les séries

$$\Gamma(s, t) = \mathrm{E}\, g_t(\xi_0) g_s(\xi_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}\big(g_t(\xi_0) g_s(\xi_k) + g_s(\xi_0) g_t(\xi_k)\big), \quad s, t \in \mathbf{R}^d,$$

convergent. Un principe d'invariance sur la fonction de répartition empirique est donné par une suite de réalisations, $Y_n(t)$, du processus gaussien $Y(t)$, centré et de covariance Γ, continu; cette suite vérifie la condition que la variable aléatoire $\operatorname{Sup}_t |X_n(t) - Y_n(t)|$ est petite en un certain sens.

Le fait pour cette variable aléatoire d'être petit presque sûrement est appelé *principe fort* tandis qu'un *principe faible* est associé à la convergence en probabilité. Contrairement à ce qui se passe dans le cas indépendant [11], les résultats connus dans le cas mélangeant conduisent à des vitesses de convergence logarithmique [14] et ne semblent pas exploitables directement. De plus, les principes forts faisant appel au lemme de Borel-Cantelli excluent d'avoir une idée des constantes, contrairement à ce qui se passe pour des principes faibles. Pour montrer ce principe d'invariance faible, nous décomposons le problème en l'étude des oscillations des processus à l'aide de méthodes développées à partir de celles exposées par Billingsley [2] pour le processus empirique et Dudley-Fernique [13] pour le processus gaussien et d'autre part l'étude du comportement des répartitions finies. Cette étude, basée sur des idées de Yurinskii [19], dans le cas indépendant est développée par [8] et améliorée par [7] dans le cas mélangeant; un travail similaire a été mené par Dehling dans [5]. Nous verrons dans les Préliminaires que ces éléments conduisent à l'évaluation d'une distance de Prohorov qui, après une reconstruction de processus, donne lieu à un principe d'invariance faible. La nouveauté de ce travail réside essentiellement dans l'usage d'un théorème de limite centrale dans la vitesse duquel apparaît explicitement la dimension; cela est possible grâce à l'emploi d'inégalités de moments convenables développées ici. Ces inégalités de moments sont de nature différente de celles montrées dans [10] et [17], dans des cas mélangeants, elles sont par contre du type de celles de [12] dans le cas indépendant.

THÉORÈME 1. *Soit* $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{A}, \boldsymbol{P})$ *assez riche pour qu'existe une variable aléatoire uniforme sur* $[0, 1]$ *indépendante de la suite* (ξ_n), *à valeurs dans* $\boldsymbol{R}^d$ *et strictement stationnaire. Alors on peut construire sur le même espace probabilisé des versions* $Y_n(t)$ *du processus gaussien* $Y(t)$ *qui vérifient*

$$\boldsymbol{P}(\sup_{t\in\boldsymbol{R}^d}|X_n(t)-Y_n(t)| \geqslant Cn^{-a}(\log n)^e) \leqslant Cn^{-a}(\log n)^e.$$

Sous les hypothèses:

(a) *La suite* $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$ *est fortement mélangeante et il existe* $0<\delta<1$ *et* p *entier,* $0<b<\frac{1}{4}$, *tels que*

$$\sum_{k>s} k^{2p-2}\alpha_k^{\delta} < \infty \qquad et \qquad \alpha_k = O(k^{(2/3)(-1-1/b)});$$

alors

$$a = \big(p-d-\beta[(p(1-\delta)-d]\big)/(2p+1) \qquad et \qquad e=\tfrac{1}{2},$$

$$\beta = \frac{1+(8/5d)\big((p-d)/(2p+1)+(b-1)/12\big)}{1+(8/5d)\big((p(1-\delta)-d)/(2p+1)\big)}.$$

(b) *La suite* $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$ *est uniformément mélangeante et il existe* $1<b<\frac{1}{4}$ *et* p *entier tels que*

$$\sum_{k\geqslant 0} k^{2p-2}\varphi_k^{1/2} < \infty \qquad et \qquad \varphi_k = O(k^{(3/4)(1-1/b)}),$$

quand $k\to\infty$. *Alors*

$$a = \frac{2(1-b)}{3\big(5d(2p+1)/(p-d)+8\big)} \qquad et \qquad e=\frac{1}{2}.$$

(c) *La suite* $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$ *est géométriquement* φ-*mélangeante, c'est-à-dire qu'il existe des constantes* $u>0$, $0<v<1$, *telles que* $\varphi_k \leqslant uv^k$. *Alors* $a = 1/3(5d+4)$, $e=1$.

Remarque. Dans le cas (b) nous pouvons écrire la vitesse de convergence en fonction de celle du mélange; si $\varphi_n = O(n^{-r-\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon>0$, alors

$$a = \frac{4r(r+2-4d)}{3(4r+3)\big(r(5d+4)+4d+8\big)}.$$

Une expression analogue peut être déterminée dans le cas (a), toutefois cette expression étant ici fort complexe, nous ne l'indiquerons pas.

Dans tous les cas, la valeur limite de a est $1/(3(5d+4))$ lorsque $b\to 0$, $\delta\to 0$, $p\to\infty$.

I. PRÉLIMINAIRES

Remarquons tout d'abord qu'il suffit de montrer le théoréme 1 dans le cas où les v.a. (ξ_n) admettent d marginales uniformes sur $[0, 1]$ comme le montre un résultat de Wichura [16].

De plus, le théorème de Strassen [15] permet de ramener notre problème à un problème de distance de Prohorov entre lois de processus:

THÉORÈME I.1. *Soit (S, σ) un espace polonais muni de sa métrique σ et de sa tribu borélienne $\mathscr{S}$. Si $\varrho_\sigma(P, Q)$ désigne la distance de Prohorov des lois P et Q sur $(S, \mathscr{S})$ muni de la distance σ, les propriétés* (i) *et* (ii) *sont équivalentes*:

(i) $\varrho_\sigma(P, Q) < \alpha$.

(ii) *Il existe une loi R, sur $(S^2, \mathscr{S}^2)$, de marginales P et Q qui vérifie*:

$$R(\{(s, t) \in S^2; \sigma(s, t) > \alpha\}) < \alpha.$$

Nous utilisons aussi [9]:

THÉORÈME I.2. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et soit X une v.a. à valeurs dans l'espace polonais $(S, \mathscr{S})$ tels qu'il existe une v.a. uniforme sur* $[0, 1]$ *indépendante de X. Alors, si une loi sur $(S^2, \mathscr{S}^2)$ admet la loi de X pour première marginale, on peut construire sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ une v.a. Y telle que la loi de (X, Y) soit R.*

Ainsi, pour démontrer le théorème I.1, nous évaluerons la distance de Prohorov $\varrho_d(P_{X_n}, R)$, où R désigne la loi du processus gaussien Y_n de l'énoncé; les processus considérés sont des v.a. à valeurs dans l'espace de Skohorod $D([0, 1]^d)$ (rendu polonais par sa métrique d) lorsque les marginales de ξ_k sont uniformes sur $[0, 1]$.

Notre évaluation de cette distance de Prohorov repose sur le lemme qui suit. Rappelons qu'un *δ-réseau*, T, d'un espace métrique (S, σ) est une partie de cet espace telle que la distance de deux points distincts est supérieure à δ et telle que les boules centrées sur T et de rayon δ recouvrent S.

Nous notons $\|\cdot\|$ la norme du sup sur $\boldsymbol{R}^k$, ϱ_σ la distance de Prohorov relative à la distance σ et Π_T la projection canonique $D([0, 1]^d) \to \boldsymbol{R}^k$ définie par $\Pi_T(x) = (x(t); t \in T)$

LEMME I.1. *Soient X et Y deux v.a. sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ à valeurs dans $D([0, 1]^d)$ et $T = \{t_1, \ldots, t_k\}$ un δ-réseau de $([0, 1]^d, \|\cdot\|)$. Si ε_U désigne pour une v.a. valeurs dans $D([0, 1]^d)$, $\varepsilon_U(\delta) = \mathrm{Inf}\{\varepsilon > 0; P(w_U(\delta) > \varepsilon) < \varepsilon\}$ (w_U est l'oscillation de U)*:

$$\varrho_d(P_X, P_Y) \leqslant \varepsilon_X(\delta) + \delta_Y(\delta) + \varrho_{\|\cdot\|}(P_{X} \circ \Pi_T^{-1}, P_{Y} \circ \Pi_T^{-1}).$$

Remarque I. 1. Si $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne de $\boldsymbol{R}^k$, notons que $\varrho_{\|\cdot\|_\infty} \leqslant \varrho_{|\cdot|}$, aussi la distance de Prohorov évaluée au §. III est-elle un majorant de celle de ce lemme.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons $\varrho_{\|\cdot\|}(P_{X^\circ}\Pi_T^{-1}, P_{Y^\circ}\Pi_T^{-1}) < \alpha$. Le théorème de Strassen [15] permet de construire une loi $\hat{Q}$, sur $R^k \times R^k$, de marginales $P_{X^\circ}\Pi_T^{-1}$ et $P_{Y^\circ}\Pi_T^{-1}$ telle que $\hat{Q}(\{(x, y); \max\{|x_i - y_i|, i = 1, \ldots, k\} > \alpha\}) < \alpha$. On montre alors dans (7) qu'il existe une loi Q, sur $D \times D$, de marginales les lois de X et Y et dont la projection canonique sur $R^k \times R^k$ est $\hat{Q}$. Ainsi, nous obtenons:

$$Q(\{(y, y); d(x, y) > \varepsilon_X(\delta) + \varepsilon_Y(\delta) + \alpha\}) \leqslant Q(\{(x, y); w_x(\delta) > \varepsilon_X(\delta)\}) +$$
$$+ Q(\{(x, y); w_y(\delta) > \varepsilon_Y(\delta)\}) + Q(\{(x, y); \max\{|x(t_i) - y(t_i)|, i = 1, \ldots, k\} > \alpha).$$

On voit ainsi que $\varrho_d(P_X, P_Y) \leqslant \varepsilon_X(\delta) + \varepsilon_Y(\delta) + \alpha$.

II. MOMENTS D'UNE SOMME DE V. A. MÉLANGEANTES

Nous donnons ici une généralisation des inégalités de Marcinkiewicz-Zygmund ([12] et [18]) au cas de v.a. mélangeantes. Les résultats obtenus sont basés sur une méthode donnée par Billingsley ([2], p. 195) dans le cas d'un moment d'ordre 4 et développé par Yokoyama [17]. Notre étude donne de meilleures évaluations que [17], dans le cas de moments d'ordre $2p$ ($p \in N$) d'une somme de v.a. mélangeante ainsi que nous le montrons dans [8].

D'autres études donnant des majorations du moment $E(S_n)^q$ ont déja été faites à partir d'une méthode donnée par Doob ([6], p. 225), ainsi Ibragimov [10] donne une majoration de l'ordre de $n^{q/2}$ sous une hypothèse de mélange plus faible que la nôtre: $\Sigma\varphi_i^{1/2} < \infty$ au lieu de $\Sigma(i+1)^{q-2}\varphi_i^{1/q} < \infty$.

Toutefois la suite de ce travail montre que nos inégalités sont plus adaptées aux cas qui nous intéressent (§.IV et [8]). De plus, notre méthode permet de lever l'hypothèse de stationnarité.

1. Variables φ-mélangeantes.

D é f i n i t i o n II.1 [10]. Soit $(X_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires. Elle est dite *φ-mélangeante* si

$$\varphi_k = \sup\{|P(A/B) - P(A)|/B \in \mathscr{M}_0^n, A \in \mathscr{M}_{n+k}^\infty, n \geqslant 0\} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0,$$

où $\mathscr{M}_i^j = \sigma(X_i, \ldots, X_j)$ si $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant \infty$.

PROPOSITION II.1 [10]. *Si Y et Z sont respectivement mesurables par rapport à $\mathscr{M}_0^n$ et $\mathscr{M}_{n+k}^\infty$, alors*

$$|\mathrm{E}\,YZ - \mathrm{E}\,Y\mathrm{E}Z| \leqslant 2\|Y\|_p \|Z\|_q \varphi_k^{1/p} \quad \textit{si } p, q \geqslant 1 \textit{ et } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

N o t a t i o n s. On note

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad \Phi_a(b) = \sum_{i=0}^\infty (i+1)^a \varphi_i^b, \quad N_a(n) = \sum_{i=1}^{[a/2]} n^i M^i,$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière d'un nombre réel et M est un nombre précisé dans la suite. Enfin $a \vee b$ et $a \wedge b$ représentent le maximum et le minimum de a et b et $a(b, c) = [b/2] \wedge [c/2]$.

THÉORÈME II.1. *Soit* $(X_n)_{n \in N}$ *une suite centrée de v.a. φ-mélangeantes vérifiant*:

(i) $\forall n \geqslant 0 \ |X_n| \leqslant 1$ *p.s.*

(ii) $\forall n \geqslant 0 \ \mathrm{E}\, X_n^2 \leqslant M$.

(iii) $\exists q \in N$, $q \geqslant 2$, *tel que* $\Phi_{q-2}(\frac{1}{2}) < \infty$.

Alors $|\mathrm{E}\, S_n^q| \leqslant K(\varphi, q) \sum_{i=1}^{[q/2]} n^i M^i$, *où* $K(\varphi, q)$ *est une constante polynomiale de* $(\Phi_0(\frac{1}{2}), \ldots, \Phi_{q-2}(\frac{1}{2}))$ *dont les coefficients ne dépendent que de* q.

Démonstration. Par récurrence, nous montrons que $\forall q \ \exists K_q$:

$$(\mathrm{H}_q) \qquad q! \sum_{0 \leqslant i_0 \leqslant \ldots \leqslant i_{q-1} \leqslant n} |\mathrm{E}\, X_{i_0} \ldots X_{i_{q-1}}| \leqslant K_q \sum_{k=1}^{[q/2]} n^k M^k.$$

Le résultat suivra, étant donné que $|\mathrm{E}\, S_n^q| \leqslant$ (membre de gauche de l'inégalité). L'inégalité (H_2) suit de la proposition II.2.

Afin de conduire un raisonnement par récurrence, nous aurons le besoin de la

Remarque II.1. $N_b(n) N_c(n) \leqslant a(b, c) N_{b+c}(n)$.

L'idée essentielle de la démonstration des résultats de cette partie est de faire intervenir $r_h = \max\{r_t; t = 1, \ldots, q-1\}$ où $r_t = i_t - i_{t-1}$, qui est l'espacement maximal de deux termes. Supposons, donc, (H_k) démontrée pour $k < q$, la somme à évaluer s'écrit $q! \sum_{i \in E_n} T_i$, où E_n désigne l'ensemble des suites croissantes de $[0, q-1]$ dans $[1, n]$. Soit $E_{n,h}$ la partie de E_n telle que r_h soit maximal, si i est dans $E_{n,h}$:

$$T_i \leqslant |\mathrm{E}\, X_{i_0} \ldots X_{i_{h-1}}| \, |\mathrm{E}\, X_{i_h} \ldots X_{i_{q-1}}| + 2\varphi_{r_h}^{1/2} M$$

(Prop. II.1).

Pour évaluer le cardinal de $\{i \in E_{n,h}; r_h = r\}$ nous remarquons que cet ensemble est déterminé par la donnée de i_0 et celle de $r_1, \ldots, r_{h-1}, r_{h+1}, \ldots, r_{q-1}$ qui sont inférieurs à r; ce cardinal est plus petit que $n(r+1)^{q-2}$. Ainsi

$$\sum_{i \in E_{n,h}} \varphi_{r_h}^{1/2} \leqslant n \sum_{r=1}^{\infty} (r+1)^{q-2} \varphi_r^{1/2} = n\varphi_{q-2}(1/2).$$

De plus, le premier membre de l'inégalité est majoré par l'hypothèse de récurrence par $(K_h N_h(n)/h!)(K_{q-h} N_{q-h}(n)/(q-h)!)$; la remarque II.1 montre que $q! \sum_{i \in E_n} T_i \leqslant K_q N_q(n)$ si

$$K_q = \{q! \cdot q \cdot \varphi_{q-2}(1/2)\} \vee \{\sum_{h=2}^{q-2} a(h,q-h) C_q^h K_h K_{q-h})\}.$$

THÉORÈME II.2. *Soit $(X_n)_{n \in N}$ une suite de v.a. φ-mélangeante et centrée telle qu'il existe un nombre entier q supérieur ou égal à 2 vérifiant, pour tout entier h compris entre 2 et q,*

$$M_h = \sup\{\|X_n\|_h,\ n \geqslant 0\} < \infty \quad \text{et} \quad \Phi_{h-2}\left(\frac{1}{h}\right) < \infty.$$

Alors

$$|\mathrm{E}\, S_n^q| \leqslant K'(\varphi, q) \sum_{i=1}^{[q/2]} n^i M_{q-2i+2}^q,$$

où $K'(\varphi, q)$ est une constante polynomiale en $(\Phi_0(1/2), \ldots, \Phi_{q-2}(1/q))$ dont les coefficients dépendent seulement de q, vérifiant

$$K'(\varphi, q) \leqslant qq!\, \Phi_{q-2}\left(\frac{1}{q}\right) + \sum_{h=1}^{q-1} \mathrm{Min}\left(\left[\frac{h}{2}\right], \left[\frac{q-h}{2}\right]\right) K'(\varphi, h) K'(\varphi, q-h) C_q^h.$$

LEMME II.1. *Posant* $F_a(n) = \sum_{i=1}^{[a/2]} n^i M_{a-2i+2}^a,$

$$F_a F_b \leqslant \mathrm{Min}([a/2], [b/2]) F_{a+b}.$$

Démonstration. Nous considérons le terme général du produit des deux sommes: $n^{i+j} M_{a-2i+2}^a M_{b-2j+2}^b$. Ce terme apparaît comme la borne supérieure de $n^{i+j} \|X_\alpha\|_{a-2i+2}^a \|X_\beta\|_{b-2j+2}^b$ pour $\alpha, \beta \geqslant 0$; l'inégalité de Hölder majore ce terme par $M_{a+b-2i-2j+2}^{a+b}$. La remarque qui suit permet alors de conclure:

Remarque II.2. $\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} c_{i+j} \leqslant a \sum_{l=2}^{a+b} c_l$ si $c_l \geqslant 0$.

Démonstration du théorème II.2. Nous modifions la majoration de T_i pour i dans $E_{n,h}$ dans la démonstration du théorème II.1:

$$T_i \leqslant |EX_{i_0} \ldots X_{i_{h-1}}|\, |\mathrm{E}X_{i_h} \ldots X_{i_{q-1}}| + 2\varphi_{r_h}^{h/q} \|X_{i_0} \ldots X_{i_{h-1}}\|_{q/h} \|X_{i_h} \ldots X_{i_{q-1}}\|_{q/(q-h)}.$$

Le terme de droite est majoré à l'aide de l'inégalité de Hölder par $2\varphi_{r_h}^{1/q} M_q^q$. Nous terminons la démonstration à l'aide du lemme II.1.

2. Variables fortement mélangeantes.

Définition II.2 [17]. Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a., la suite $(X_n)_{n\in N}$ est dite *fortement mélangeantes de coefficient de mélange* α lorsque

$$\alpha_k = \sup\{|P(A\cap B)-P(A)P(B)|/A\in \mathscr{M}_0^n,\ B\in \mathscr{M}_{n+k}^{\infty},\ n>0\}\to 0,$$

où $\mathscr{M}_i^j = \sigma(X_i,\ldots,X_j)$ pour $0\leqslant i\leqslant j\leqslant \infty$.

Proposition II.2 [17]. *Si Y et Z sont des v.a. respectivement $\mathscr{M}_0^n$ et $\mathscr{M}_{n+k}^{\infty}$ measurables, alors, lorsque $1\leqslant p,q,r\leqslant\infty$ vérifient $p^{-1}+q^{-1}+r^{-1}=1$,*

$$|\mathrm{E}\,YZ-\mathrm{E}Y\mathrm{E}Z|\leqslant 12\|Y\|_p\|Z\|_q\alpha_k^{1/r}.$$

Afin d'obtenir des majorations du même type que celles du paragraphe 1, nous utilisons la démonstration par récurrence des théorèmes 1 et 2 de [17]. Pour cela nous modifions simplement la majoration de la formule (4.6) en utilisant le lemme suivant, analogue au lemme II.1:

Lemme II.2. *Posons*

$$M_k=\sup\{\|X_n\|_{k+\delta}/n\in N\}\qquad et\qquad U_b(n)=\sum_{i=1}^{[b/2]} n^i M_{b-2i+2}^b.$$

Nous avons $U_bU_c\leqslant a(b,c)\,U_{b+c}$.

Notation. $A_a(b)=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)^a\alpha_i^b$.

Théorème II.3. *Soit (X_n) une suite de v.a. fortement mélangeantes vérifiant:*

(i) $$\forall n\geqslant 0\ |X_n|\leqslant 1\ p.s.;$$

(ii) $$\exists\,\delta\in]0,1[,\ \forall n\in N:(\mathrm{E}|X_n|^{2/(1-\delta)})^{1-\delta}\leqslant M;$$

(iii) $$\exists\, q\in N,\ q\geqslant 2\ tel\ que\ A_{q-2}(\delta)<\infty.$$

Alors $|\mathrm{E}S_n^q|\leqslant k(q,\alpha,\delta)\sum_{i=1}^{[q/2]} n^iM^i$, *où*

$$k(q,\alpha,d)$$
$$=[12qq!\,A_{q-2}(\delta)]\vee\left[\sum_{h=1}^{q-1}\mathrm{Min}\left(\left[\frac{h}{2}\right],\left[\frac{q-h}{2}\right]\right)C_q^h k(h,\alpha,\delta)k(q-h,\alpha,\delta)\right].$$

Théorème II.4. *Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite fortement mélangeante centrée et telle qu'il existe un nombre entier q supérieur ou égal à 2 vérifiant, pour tout entier h compris entre 2 et q,*

$$M_h=\sup\{\|X_n\|_{h+\delta},\ n\geqslant 0\}<\infty\qquad et\qquad A_{h-2}\left(\frac{\delta}{h+\delta}\right)<\infty.$$

Alors $|\mathrm{E}S_n^q| \leqslant k'(q,\alpha) \sum_{i=1}^{[q/2]} n^i M_{q-2i+2}^q$, *où*

$$k'(q,\alpha) = \left[12qq!\,A_{q-2}\left(\frac{\delta}{q+\delta}\right)\right] \vee \left[\sum_{h=1}^{q-1} \mathrm{Min}\left(\left[\frac{h}{2}\right], \left[\frac{q-h}{2}\right]\right) C_4^h\, k'(h,\alpha)\, k'(q-h,\alpha)\right].$$

Démonstrations. Nous modifions les démonstrations des théorèmes II.1 et II.2.

Pour i dans $E_{n,h}$, nous majorons:

$$T_i \leqslant |\mathrm{E}X_{i_0}\dots X_{i_{h-1}}|\,|\mathrm{E}X_{i_h}\dots X_{i_{q-1}}| + S_i,\ S_i \leqslant 12\,\alpha_{r_h}^{\delta/(q+\delta)} M_q^q \quad \text{(thèorème II.4);}$$

$$S_i \leqslant 12\alpha_{r_h}^{\delta} \|X_{i_0}\dots X_{i_{h-1}}\|_{q/h(1-\delta)} \|X_{i_h}\dots X_{i_q}\|_{q/(q-h)(1-\delta)} \leqslant 12\alpha_{r_h}^{\delta} M$$

(théorème II.3).

3. Constantes et inégalité exponentielle. Nous supposons maintenant que le mélange utilisé est géométrique, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $a \geqslant 0$ et $0 \leqslant \theta < 1$ vérifiant $\alpha_n \leqslant a\theta^n$ dans le cas d'un mélange fort où $\varphi_n \leqslant a\theta^n$ dans le cas φ-mélangeant.

Les théorèmes II.1 et II.3 donnent des constantes notées c_q qui vérifient une relation du récurrence de la forme

$$c_q = [q!\,L_q] \vee [\sum_{h=2}^{q-2} C_q^h a(h, q-h) c_h c_{q-h}],$$

où $L_q \leqslant Lq!\,q$ et $L = 12ae^{1+e}/(1-\theta^{1/2})$.

Le calcul de la fonction génératrice de la suite $c_q/(q!)^2$ montre que $c_q \leqslant L^q q(2q-2)!$ et donc $\lim_q c_q^{1/2q}/q \leqslant L$.

L'inégalité précédente s'écrit, pour une suite (X_n) de v.a. φ-mélangeante, stationnaire d'ordre 2, centrée et bornée par 1: $\mathrm{E}(X_1 + \dots + X_n)^q \leqslant qc_q(nv)^{q/2}$ où $v = \mathrm{E}X_i^2$, lorsque $nv \geqslant 1$.

En optimisant cette inégalité par rapport à q et en utilisant l'inégalité de Markov nous obtenons une inégalité de Bernstein plus précise que celle de Bosq [3]:

$$P(|X_1 + \dots + X_n|/\sqrt{nv} \geqslant t) \leqslant \exp(4 - 2\sqrt{t}/(Me))$$

$$\text{pour } M > L \text{ et } n \geqslant \left(n(M)\frac{1}{\sqrt{v}}\right).$$

Le cas d'un mélange fort s'obtient en posant $v = \|X_0\|_{2/(1-\delta)}^2$.

III. PROCESSUS DE REPARTITION EMPIRIQUE

1. Introduction. La distance de Prohorov de deux lois de processus à valeurs dans $D([0, 1]^d)$ est évaluée grâce à la distance de Prohorov des répartitions finies et grâce à leurs oscillations. La distance de Skohorod, d, sur $D([0,1]^d)$ est décrite par Wichura [16]; l'espace $D([0, 1]^d)$ muni de la norme uniforme n'est pas polonais, nous évaluons donc d'abord la distance de Prohorov des processus pour la distance d. Après leur reconstruction une nouvelle utilisation des oscillations permet l'évaluation de leur distance en norme uniforme grâce à leur distance dans l'espace de Skohorod. La méthode qui nous permet d'aboutir à l'oscillation du processus empirique est une généralisation multidimensionnelle de celle de Billingsley [2]; l'oscillation du processus gaussien est obtenue grâce au théorème de Dudley-Fernique [13].

Notations. Dans cette partie les éléments de N^d ou R^d sont désignés grâce à des flèches: $\vec{i}, \vec{j}, \ldots, \vec{s}, \vec{t} \ldots$; de plus une expression du type $\vec{s}+\vec{j}\vec{k}/n$ désignera l'élément de R^d de composantes $(s_1+j_1 k_1/n, \ldots, s_d+j_d k_d/n)$ lorsque $\vec{s}=(s_1, \ldots, s_d)$, $\vec{j}=(j_1, \ldots, j_d)$ et $\vec{k}=(k_1, \ldots, k_d)$. Nous utilisons les normes suivantes: $\|\vec{s}\|_l = |s_1|+\ldots+|s_d|$ et $\|\vec{s}\| = \text{Max}\{|s_i|;\ i = 1, \ldots, d\}$ pour $\vec{s}=(s_1, \ldots, s_d) \in R^d$.

L'ordre utilisé sur R^d est décrit par $\vec{s} \leqslant \vec{t} \Leftrightarrow (s_i \leqslant t_i,\ i = 1, \ldots, d)$. De plus, $(\vec{s} < \vec{t}) \Leftrightarrow (s_i \leqslant t_i,\ i = 1, \ldots, d; \exists\, i_0 \in [1, d]\ s_{i_0} < t_{i_0})$.

2. Oscillation de la fonction de répartition empirique. L'étude préliminaire permet de supposer que la loi commune aux variables aléatoires ξ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ admet des marginales uniformes sur $[0, 1]$. Nous notons

$$F_n(\vec{t}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{(\xi_k < \vec{t})};$$

ainsi $X_n(\vec{t}) = \sqrt{n}\big(F_n(\vec{t}) - F(\vec{t})\big)$ pour $\vec{t} \in [0, 1]^d$.

Nous étudions le cas d'une suite fortement mélangeante $(\xi_k)_{k \geqslant 1}$, les modifications concernant le cas φ-mélangeant sont indiquées en remarques.

THÉORÈME III.1. *Lorsque le mélange de la suite* $(\xi_k)_{k \geqslant 1}$ *vérifie*

$$\sum_{i=0}^{+\infty} i^{2p-2} \alpha_i^{\delta} < \infty$$

pour $p \in N$, $\delta \in [0, 1[$ *vérifiant* $p(1-\delta) > d$, *alors*

$$P\big(\text{Sup}\{|X_n(\vec{s}) - X_n(\vec{t})|;\ \|\vec{s}-\vec{t}\| \leqslant n^{\beta-1}\} \geqslant Kn^{-\theta}\big) \leqslant Kn^{-\theta},$$

où $\theta = [p(1-\beta(1-\delta)-d(1-\beta))]/(2p+1)$ *et* K *désigne une constante qui ne dépend que du mélange, de* p, d *et* δ.

Remarques III.1. (i) La constante K est donnée par

$$K^{2p+1} = d^{u-d}\, 2^{2p}\left[pk(2p,\alpha,\delta)\left(2^{-d/(2p+1)} - 2^{-u/(2p+1)}\right)^{-(2p+1)} + 1\right],$$

où $u = p(1-\delta)$ et $k(2p,\alpha,\delta)$ désigne la constante donnée par le théorème II.3.

(ii) Des calculs plus simples donnent un énoncé analogue dans le cas φ-mélangeant sous l'hypothèse $p > d$, $\Sigma i^{2p-2}\varphi_i^{1/2} < \infty$; $\theta = (p-d)(1-\beta)/(2p+1)$ et l'expression de K est donnée avec $u = p$ et $k(2p,\alpha,\delta)$ est remplacé par $K(2p,\varphi)$ définie au théorème II.1.

La démonstration se fait en plusieurs étapes; elle est calquée sur [2], §12, p. 87).

LEMME III.1. *Nous avons*

$$\mathrm{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} (g_{\vec t}(\xi_k) - g_{\vec s}(\xi_k))\Big)^{2p} \leqslant k(2p,\alpha,\delta)\sum_{i=1}^{p} n^i\, \|\vec t - \vec s\|_1^{i(1-\delta)}.$$

Démonstration. Le théorème II.3 conclue en utilisant

$$\mathrm{E}(g_{\vec t}(\xi_s) - g_{\vec s}(\xi_l))^2 \leqslant \mathrm{E}(g_{\vec t\vee\vec s}(\xi_1) - g_{\vec t\wedge\vec s}(\xi_1))^2 \leqslant \sum_{i=1}^{d} |t_i - s_i| = \|\vec s - \vec t\|_1.$$

LEMME III.2. *Nous avons*

$$\operatorname{Sup}\left\{|X_n(\vec t) - X_n(\vec s)|;\ \vec s \leqslant \vec t < \vec s + \frac{\vec m}{n}\right\}$$
$$\leqslant 3\operatorname{Max}\left\{\left|X_n(\vec s) - X_n\left(\vec s + \frac{\vec i}{n}\right)\right|;\ 0 \leqslant \vec i < \vec m\right\} + 3d/\sqrt{n}.$$

Démonstration. Un raisonnement classique s'écrit

$$|X_n(\vec s) - X_n(\vec t)| \leqslant \left|X_n(\vec s) - X_n\left(\vec s + \frac{\vec i}{n}\right)\right| +$$
$$+ \left|X_n(\vec t) - X_n\left(\vec s + \frac{\vec i}{n}\right)\right| \quad \text{si } \vec s + \frac{\vec i}{n} \leqslant \vec t \leqslant \vec s + \frac{\vec i + \vec 1}{n},$$

où $\vec 1 = (1, \ldots, 1)$.

D'autre part la monotonie de F_n et F montre que

$$\left|X_n(\vec t) - X_n\left(\vec s + \frac{\vec i}{n}\right)\right|$$
$$\leqslant \sqrt{n}\left|F_n(\vec t) - F_n\left(\vec s + \frac{\vec i}{n}\right)\right| + \sqrt{n}\left|F(\vec t) - F\left(\vec s + \frac{\vec i}{n}\right)\right|$$

$$\leqslant \sqrt{n}\left|F_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}+\vec{1}}{n}\right)-F_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}}{n}\right)\right|+\sqrt{n}\left|F\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}+\vec{1}}{n}\right)-F\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}}{n}\right)\right|$$

$$\leqslant \left|X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}+\vec{1}}{n}\right)-X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}}{n}\right)\right|+2\sqrt{n}\left|F\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}+\vec{1}}{n}\right)-F\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}}{n}\right)\right)$$

$$\leqslant \left|X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}+\vec{1}}{n}\right)-X_n(\vec{s})\right|+\left|X_n(\vec{s})-X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}}{n}\right)\right|+2d/\sqrt{n}.$$

Le résultat suit.

Lemme III.3. *En posant*

$$\tilde{M}(\vec{m}) = \operatorname{Max}\left\{\left|X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}}{n}\right)-X_n(\vec{s})\right| \wedge \left|X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}}{n}\right)-X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{m}}{n}\right)\right|;\ 0\leqslant \vec{i}\leqslant \vec{m}\right\},$$

nous avons $P(\tilde{M}(\vec{m})\geqslant \lambda)\leqslant \hat{K}\,\|\vec{m}\|_1^u/(n\lambda^2)^p$, *où* $\hat{K}$ *est une constante dépendant seulement de* p, d *et* δ *avec* $u=p(1-\delta)>d$,

Démonstration. Soit $\vec{m}$ dans N^d. On découpe le cube

$$U = N^d \cap \prod_{i=1}^{d}\,[1, m_i]$$

selon un point $\vec{h}$ de U en 2^d cubes repérés par $\vec{l}\in\{0, 1\}^d$; le sous-cube associé à $\vec{l}$ est noté $U(\vec{l})$. On pose aussi:

$$M(\vec{l}) = \operatorname{Max}\left\{\left|X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}}{n}\right)-X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}\vec{h}}{n}\right)\right| \wedge \right.$$

$$\left.\wedge\left|X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{l}\vec{m}}{n}+\frac{(\vec{1}-\vec{l})(\vec{h}-\vec{1})}{n}\right)-X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}}{n}\right)\right|;\vec{i}\in U(\vec{l})\right\},$$

$$D(\vec{i}) = \left|X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}}{n}\right)-X_n(\vec{s})\right| \wedge \left|X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{m}}{n}\right)-X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}}{n}\right)\right|,$$

$$\hat{M}(\vec{l}) = \left|X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}\vec{h}}{n}\right)-X_n(\vec{s})\right| \vee \left|X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}\vec{m}}{n}+\frac{(\vec{1}-\vec{l})(\vec{h}-\vec{1})}{n}\right)-X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{m}}{n}\right)\right|.$$

Si $\vec{i}\in U(\vec{l})$, $D(\vec{i})\leqslant M(\vec{i})+\hat{M}(\vec{i})$. En effet, si

$$X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}}{n}\right)-X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{l}\vec{h}}{n}\right)\leqslant M(\vec{l}),$$

$$\left|X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}}{n}\right)-X_n(\vec{s})\right|\leqslant M(\vec{l})+\left|X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{l}\vec{h}}{n}\right)-X_n(\vec{s})\right|$$

et sinon, on a

$$\left|X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{m}}{n}\right)-X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}}{n}\right)\right| \leqslant \hat{M}(\vec{l})+\left|X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}}{n}\right)-X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{l}\vec{m}}{n}+\frac{(\vec{1}-\vec{l})(\vec{h}-\vec{1})}{n}\right)\right|.$$

Le lemme III.3 se démontre par récurrence sur $\vec{m}$. On remarque que $\tilde{M}(0)=0$. Supposons le résultat démontré pour $\vec{m}'=(m_1, \ldots, m_{j-1}, m_j-1, m_{j+1}, \ldots, m_d)$; si $\vec{s}'=\vec{s}+\vec{l}\vec{h}/n$, alors $M(\vec{l})(\vec{s})=\tilde{M}(\vec{r})(\vec{s}')$ avec $\vec{r}=\vec{l}\vec{m}+ +(\vec{1}-\vec{l})(\vec{h}-\vec{1})-\vec{l}\vec{h}$.

L'hypothèse de récurrence appliquée à $\vec{m}'$ peut s'écrire:

$$P\big(M(\vec{l})\geqslant\lambda\big)\leqslant\frac{\hat{K}}{n^p\lambda^{2p}}\Big[\sum_{k=1}^{d} l_k(m_k-h_k)+(1-l_k)(h_k-1)\Big]^u.$$

Notons $c=pk(2p, \alpha, \delta)$:

$$P\big(M(\vec{l})\geqslant\lambda\big)\leqslant\frac{\hat{K}}{n^p\lambda^{2p}}\Big(\sum_{i=1}^{d} m_i\Big)^u 2^{-u} \quad \text{si } h_k=\left[\frac{m_k}{2}\right]+1,\ k=1, \ldots, d$$

et $\vec{h}=(h_1, \ldots, h_d)$.

Le lemme III.1. implique

$$P\big(\hat{M}(\vec{l})\geqslant\lambda\big)\leqslant\frac{c}{n^p\lambda^{2p}}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{d} l_i h_i\Big)^u+\Big(\sum_{i=1}^{d}(1-l_i)(m_i-h_i+1)\Big)^u\leqslant\frac{c}{n^p\lambda^{2p}}\Big(\sum_{i=1}^{d} m_i\Big)^u.$$

Ainsi, une optimisation montre que

$$P\big(M(\vec{l})+\hat{M}(\vec{l})\geqslant\lambda\big)\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{d} m_i\Big)^u\big((\hat{K}2^{-u})^{1/(2p+1)}+c^{1/(2p+1)}\big)^{2p+1}=A.$$

L'inégalité $\tilde{M}(\vec{m})\leqslant \operatorname{Max}\{\hat{M}(\vec{l})-M(\vec{l})\}$ entraîne $P\big(\tilde{M}(\vec{m})\geqslant\lambda\big)\leqslant 2^d A$, le choix de $\hat{K}$ permet de conclure.

Lemme III.4. *Soit $n\geqslant m_1, \ldots, m_d$. Alors*

$$P\left(\operatorname{Max}\left\{\left|X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}}{n}\right)-X_n(\vec{s})\right|;\ 0\leqslant\vec{i}\leqslant\vec{m}\right\}\geqslant\lambda\right)$$
$$\leqslant K'\|\vec{m}\|_1^u/(n\lambda^2)^p, \quad \text{où } K'=2^p(\hat{K}+1).$$

Démonstration. Notant que

$$\operatorname{Max}\left\{\left|X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}}{n}\right)-X_n(\vec{s})\right|;\ 0\leqslant\vec{i}\leqslant\vec{m}\right\}\leqslant\tilde{M}(\vec{m})+\left|\Big(X_n\Big(\vec{s}+\frac{\vec{m}}{n}\Big)-X_n(\vec{s})\right|,$$

on a la majoration

$$P\left(\tilde{M}(\vec{m})\geqslant\frac{\lambda}{2}\right)+P\left(\left|X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{m}}{n}\right)-X_n(\vec{s})\right|\geqslant\frac{\lambda}{2}\right).$$

Démonstration du théorème III.1. Soit $\lambda \geqslant d/\sqrt{n}$. Le lemme III.2 entraîne:

$$P\left(\operatorname{Sup}\left\{\left|X_n(\vec{s})-X_n(\vec{t})\right|;\ \vec{s}\leqslant\vec{t}\leqslant\vec{s}+\frac{\vec{m}}{n}\right\}\geqslant 6\lambda\right)$$

$$\leqslant P\left(\operatorname{Max}\left\{\left|X_n\left(\vec{s}+\frac{\vec{i}}{n}\right)-X_n(\vec{s})\right|;\ 0\leqslant i\leqslant m\right\}\geqslant\lambda\right)\leqslant\frac{K'}{\lambda^{2p}}\left[\frac{\|\vec{m}\|_1^{u-d}}{n^{p-d}}\right]\left(\frac{\|\vec{m}\|_1}{n}\right)^d.$$

Procédant comme dans [2], nous obtenons, en posant $m_i=[n^\beta]$, $i=1,\ldots,d$:

$$P(\operatorname{Sup}\{|X_n(\vec{s})-X_n(\vec{t})|;\ \|\vec{s}-\vec{t}\|\leqslant n^{\beta-1}\}\geqslant 18\lambda)\leqslant\frac{K'}{\lambda^{2p}}n^{-(2p+1)\theta}.$$

Le résultat suit du bon choix de λ.

3. Oscillation du processus gaussien. L'oscillation du processus gaussien $Y(t)$, calculée directement dans [8], est évaluée ici grâce au théorème de Dudley-Fernique (cf. [13], théorème 3.1, p. 25). Nous avons besoin ici d'une évaluation de cette oscillation d'un ordre analogue à celle donnée au théorème III.1 pour le processus de répartition empirique, c'est pourquoi nous énonçons le

THÉORÈME III.2. *Le processus gaussien $Y(t)$ défini plus haut vérifie*

$$P(\operatorname{Sup}\{Y(\vec{t})-Y(\vec{s})|;\ \|\vec{t}-\vec{s}\|\leqslant\delta\}\geqslant u(\delta))\leqslant u(\delta),\quad \text{où } u(\delta)=c\delta^{2/3}\log(1/\delta)^{1/3},$$

et c désigne une constante dépendant du processus.

4. Démonstration du principe d'invariance. Les paragraphes 2 et 3 nous donnent des valeurs de l'oscillation du processus de répartition empirique $X_n(t)$ et du processus gaussien accompagnant $Y(t)$ dans le cas de variables aléatoires formant une suite fortement mélangeante (resp. φ-mélangeante). Dans la méthode exposée au § I, il nous manque à énoncer des résultats donnant la vitesse de convergence des répartitions k-dimensionnelles de $X_n(t)$ vers $Y(t)$ en fonction de k. Un résultat de ce type est donné dans [8] (Th. 3), il est amélioré dans [7] et s'énonce comme suit (nous notons ici ν_n (resp. ν) la loi de la variable $(X_n(t);\ t\in T)$, où le cardinal de T vaut $k(n)$ (resp. celle de $(Y(t),\ t\in T)$):

THÉORÈME III.3 [7]. *Pour toute partie T de $[0, 1]^d$ de cardinal $k(n)$, la distance de Prohorov $\varrho_{|\cdot|}(\nu_n, \nu)$ s'évalue,*

(a) *Dans le cas fortement mélangeant, si $\Sigma n^2\alpha_n^\delta<\infty$, $\sup_n\{\alpha_n^\delta n^\nu k(n)\}<\infty$ pour un $\delta\in]0, 1[$ et un $b\in]0, \frac{1}{4}[$, avec $\nu=\frac{2}{3}(1/b-1)$,*

$$\varrho_{|\cdot|}(\nu_n, \nu)\leqslant Ck^{5/8}(n)\,n^{(b-1)/12}(\log^{1/2}k(n)+\log^{1/2}n).$$

(b) *Dans le cas* φ*-mélangeant, si* $\Sigma n^2 \varphi_n^{1/2} < \infty$ *et* $\sup_n \{\varphi_n n^{(3/4)(1/b-1)}\} < \infty$ *pour un* $b \in]0, \frac{1}{4}[$, *alors*

$$\varrho_{|\cdot|}(v_n, v) \leqslant Ck^{5/8}(n) n^{(b-1)/12} \left(\log^{1/2} k(n) + \log^{1/2} n\right).$$

(c) *Dans le cas* φ*-mélangeant géométrique* (c'est-à-dire: $\exists\, u, v > 0$, $v < 1$ tels que $\varphi_n \leqslant uv^n$) *nous obtenons*

$$\varrho_{|\cdot|}(v_n, v) \leqslant Ck^{5/8}(n) n^{-1/12} \log^{1/12}(n) \left(\log^{1/2} n + \log^{1/2} k(n)\right).$$

La constante C ne dépend que du mélange utilisé, en particulier elle est indépendante de l'ensemble T de cardinal $k(n)$ utilisé.

Remarque III.2. Une méthode analogue est utilisée par Dehling [5].

La méthode donnée au préliminaire et les théorèmes III.1, III.2 et III.3 donnent $\varrho_d(P_{X_n}, P_Y) \leqslant Cn^{-\gamma}(\log n)^{1/2} = \lambda_n$, où γ est donné dans le théorème 1.

Le lemme de Dudley [9] montre que l'on peut reconstruire des versions du processus Y sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ vérifiant $P\left(d(X_n, Y_n) \geqslant \lambda_n\right) \leqslant \lambda_n$. De plus, si $x, y \in D([0, 1]^d)$:

$$d(x, y) < \lambda \Rightarrow \sup_t |x(t) - y(t)| \leqslant \lambda + w_x(\lambda).$$

Ainsi le théorème III.1, qui montre que $P\left(w_{X_n}(\lambda_n) \geqslant \lambda_n\right) \leqslant \lambda_n$, entraîne la conclusion du théorème 1 dans les cas (a) et (b). Le cas (c) découle d'un passage à la limite avec $p = p(n) = [\log n / \log\log n]$ en utilisant l'expression des constantes qui interviennent et leur évaluation du § II.3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. J. Bickel et M. Rosenblatt, *On some global measure of deviation of density function estimates*, Ann. Stat. 1.6 (1973), p. 1071–1095.

[2] P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, Wiley, New York 1968.

[3] D. Bosq, *Inégalité de Bernstein pour les processus stationnaires*, Note aux C.R.A.S., Série A, T. 281 (1975), p. 1095–1098.

[4] Y. A. Davydov, *Convergence of distributions generated by stationary stochastic processes*, Th. Prob. Appl. 13 (1968), p. 691–696.

[5] H. Dehling, *Limit theorems for sums of weakly dependent Banach space valued random variables*, Z. W. 63 (1983), p. 393–432.

[6] J. L. Doob, *Stochastic processes*, Wiley, New York 1961.

[7] P. Doukhan, J. Leon et F. Portal, *Calcul de la vitesse de convergence dans le théorème central limite vis à vis des distances de Prohorov, Dudley et Lévy dans le cas de variables aléatoires dépendantes*, Prob. Math. Stat. 6.1. (1985), p. 19–27.

[8] P. Doukhan et F. Portal, Note aux C.R.A.S., Série 1, T. 297 (1983), p. 129–132.

[9] R. M. Dudley et W. Philipp, *Invariance principles for sums of Banach space valued random elements and empirical processes*, Z. W. 62 (1983), p. 509.

[10] I. A. Ibragimov, *Some limit theorems for stationary sequences*, Th. Prob. Appl. 7 (1962), p. 349.

[11] J. Komlos, P. Major et G. Tusnady, *An approximation of partial sums of independent RV's, and the sample DF.I*, Z. W. 32 (1975), p. 111.
[12] J. Marcinkiewicz et A. Zygmund, *Quelques théorèmes sur les fonctions indépendantes*, Studia Math. 7 (1938), p. 104.
[13] M. B. Marcus et G. Pisier, *Random Fourier series with applications to harmonic analysis*, Princeton University Press, 1981.
[14] W. Philipp et L. Pinzur, *Almost sure approximation theorems for multidimensional empirical processes*, Z. W. 54 (1980), p. 1.
[15] V. Strassen, *The existence of probability measures with given marginals*, Ann. Math. Stat. 36 (1965), p. 423.
[16] M. Wichura, *Some Strassen type laws of the iterated logarithm for multiparameter stochastic processes with independent increments*, Ann. Prob. 1 (1973), p. 272.
[17] R. Yokoyama, *Moment bounds for stationary mixing sequences*, Z. W. 52 (1980), p. 45.
[18] R. M. G. Young, *On the best constant in Khintchine inequality*, J. London Math. Soc. 14 (1967), p. 496.
[19] V. V. Yurinskii, *On the error of Gaussian approximation for convolution*, Th. Prob. Appl. 22 (1977), p. 236.

Université de Paris-Sud
91405 Orsay Cedex
France

Received on 4. 2. 1986